4 Aplicaciones lineales

4.1 Aplicación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (en general, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una aplicación $f : V \longrightarrow W$ se llama **aplicación lineal** u **homomorfismo** si

- $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Estas dos condiciones son equivalentes a la única condición:

$$f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) \ , \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \ , \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

4.2 Ejemplos

1. Las siguientes aplicaciones, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, son aplicaciones lineales:
   (a) Homotecia: $f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Proyección: $f(x, y) = (x, 0)$.
   (c) Simetría: $f(x, y) = (x, -y)$
2. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ es una aplicación lineal (asociada a la matriz A). Obviamente, para que tenga sentido el producto $A\mathbf{u}$, se entiende que el vector $\mathbf{u}$ se escribe en columna, como se hará siempre que esté implicado en operaciones matriciales.
3. La aplicación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ -x+2y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = x-y \\ y' = x \\ z' = -x+2y \end{array} \right.$$

4.3 Propiedades

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se cumple:

1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$.
3. S subespacio vectorial de $V \Longrightarrow f(S)$ es subespacio vectorial de W.
4. T subespacio vectorial de $W \Longrightarrow f^{-1}(T)$ es subespacio vectorial de V.

4.4 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se llama **imagen** al subespacio vectorial $\operatorname{Im} f = f(V)$, y **núcleo** al subespacio vectorial $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$.

4.5 Definiciones

Una aplicación lineal (homomorfismo) se llama **monomorfismo** si es inyectiva, **epimorfismo** si es sobreyectiva, e **isomorfismo** si es biyectiva. Cuando los espacios inicial y final coinciden, la aplicación lineal y el isomorfismo se suelen llamar **endomorfismo** y **automorfismo**, respectivamente.

4.6 Condición necesaria y suficiente de monomorfismo

Sea $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal. Entonces

$$f \text{ es monomorfismo} \iff \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

Demostración:
($\Rightarrow$) Si f es inyectiva, entonces:

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Longrightarrow f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{0}) \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

luego $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.
($\Leftarrow$) Inversamente, si $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, entonces

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Longrightarrow f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

luego f es inyectiva.

4.7 Dimensión del subespacio imagen

Sea $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal. Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V, entonces

$$\operatorname{Im} f = L\left(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}\right) \text{ y, en consecuencia } \dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$$

Demostración: Si $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} f$, existe $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \in V$ tal que

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{v}_i)$$

luego $\mathbf{w} \in L\left(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}\right)$. Inversamente, si $\mathbf{w} \in L\left(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}\right)$, entonces

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \text{ y } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \in V$$

luego $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} f$.

4.8 Determinación de una aplicación lineal

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ son n vectores cualesquiera de W, entonces existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i \ \text{, para } 1 \leq i \leq n$$

Demostración: Para cada $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i \in V$ se define

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{w}_i$$

Es fácil ver que f es aplicación lineal y que $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, para $1 \leq i \leq n$. Además es única, pues si $g : V \longrightarrow W$ verifica la misma condición, entonces

$$g(\mathbf{v}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{w}_i = f(\mathbf{v})$$

4.9 Observaciones

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ viene definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces

- $\operatorname{Ker} f$ son las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Si $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces

  $$\operatorname{Im} f = L\left(\{f(\mathbf{e}_1),\, f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}\right) = L\left(\{\mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}\right)$$

  donde $\mathbf{c}_i$ es la columna i-ésima de la matriz A.

4.10 Ejemplo

Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= L\left(\{(1,0,1),(0,1,1),(1,0,1)\}\right) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,1)\}\right) \\ \operatorname{Ker} f &= \{\mathbf{u} \,:\, A\mathbf{u} = \mathbf{0}\} = L\left(\{(1,0,-1)\}\right) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{array} \right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4.11 Matriz de una aplicación lineal

Como se ha visto, una áplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ queda unívocamente determinada por las imágenes de los elementos de una base $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V. Si $B_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base de W, y

$$f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{w}_i \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

entonces la imagen de cualquier $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{B_V} \in V$, expresada en la base B_W de W, es

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathbf{w}_i$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{u}$$

donde las columnas de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamada **matriz de la aplicación** respecto de las bases B_V y B_W, son las coordenadas en la base B_W de las imágenes de los vectores de la base B_V. Se suele indicar $A = M(f, B_V, B_W)$.
Fijadas las bases B_V y B_W, a cada aplicación lineal le corresponde una matriz y viceversa.
En el caso particular de que $V = W$ y que la base B en ambos es la misma, se indica simplemente $A = M(f, B)$.

4.12 Ejemplo

La expresión matricial de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida, respecto de las bases canónicas, por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para hallar el núcleo, se resuelve el sistema:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha \end{array} \right. \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de donde $\operatorname{Ker} f = \{(1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 0)\}$. La imagen es

$$\operatorname{Im} f = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

4.13 Dimensiones de la imagen y el núcleo

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$$

Demostración: Sean $\dim V = n$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = r \leq n$, y

$$B_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \quad \text{una base del Ker}\, f$$
$$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{una base de } V$$

Entonces $B_2 = \{f(\mathbf{v}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$, ya que

- B_2 es un sistema de generadores:

$$\mathbf{w} \in \operatorname{Im} f \Longrightarrow \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i \in V$$
$$\Longrightarrow \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=r+1}^{n} x_i f(\mathbf{v}_i)$$

- B_2 es linealmente independiente:

$$\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0} \Longrightarrow \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \in \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} (-\alpha_i) \mathbf{v}_i$$
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \alpha_i = 0\,, \;\; 1 \leq i \leq n \Longrightarrow \alpha_i = 0\,, \;\; r+1 \leq i \leq n$$

Por lo tanto $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$.

4.14 Rango de una aplicación lineal

Si A es la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$, respecto de las bases B_V y B_W, entonces, puesto que el núcleo es el espacio de soluciones del sistema $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, se ha de cumplir que

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim V - \operatorname{rg} A \Longrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} A$$

Luego el rango de cualquier matriz asociada a f (respecto de bases cualesquiera), que se llama **rango de la aplicación lineal**, ha de ser constante e igual a la dimensión de la imagen.

4.15 Proposición

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal con $\dim V = \dim W = n < \infty$, entonces

$$f \text{ es isomorfismo} \Longleftrightarrow f \text{ es monomorfismo} \Longleftrightarrow f \text{ es epimorfismo}$$

Demostración:

$$f \text{ es epimorfismo} \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W = n \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 0 \Longleftrightarrow f \text{ es monomorfismo}$$

4.16 Composición de aplicaciones lineales

Si $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow W$ son aplicaciones lineales, entonces $g \circ f : U \longrightarrow W$ es aplicación lineal, y

$$M(g \circ f, B_U, B_W) = M(g, B_V, B_W) \cdot M(f, B_U, B_V)$$

Demostración: Sean $A = M(g \circ f, B_U, B_W)$, $B = M(g, B_V, B_W)$ y $C = M(f, B_U, B_V)$. Entonces

$$(g \circ f)\left(\mathbf{u}_{B_U}\right) = g\left(f\left(\mathbf{u}_{B_U}\right)\right) = g\Big(\left(C\mathbf{u}\right)_{B_V}\Big) = \left(BC\mathbf{u}\right)_{B_W} \Longrightarrow A = BC$$

4.17 Ejemplo

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vienen definidas por

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas, entonces $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $f \circ g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vienen definidas por

$$g \circ f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}$$

$$f \circ g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -y \\ -x+y-z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas.

4.18 Matriz de un cambio de base

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \qquad \text{y} \qquad B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$$

dos bases de V. La aplicación que hace corresponder a cada vector $\mathbf{u} \in V$ en la base B el mismo vector expresado en la base B' es la apl8icación identidad:

$$\begin{aligned} Id : V^B &\longrightarrow V^{B'} \\ \mathbf{u}_B &\longrightarrow \mathbf{u}_{B'} = A\mathbf{u}_B \end{aligned}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz cuya columna i-ésima es la imagen de $\mathbf{v}_i$, es decir las coordenadas de $\mathbf{v}_i$ en la base B'.
Puesto que esta aplicación es un isomorfismo, $\operatorname{rg} A = n$ y la matriz A es regular. Su inversa A^{-1} es la que pasa de las coordenadas respecto de B' a las coordenadas respecto de B. Resumiendo:

$$\begin{aligned} A = M(Id, B, B') &= ((\mathbf{v}_1)_{B'}, \dots, (\mathbf{v}_n)_{B'}) \quad \text{y} \quad A\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_{B'} \\ A^{-1} = M(Id, B', B) &= \big((\mathbf{v}'_1)_B, \dots, (\mathbf{v}'_n)_B\big) \quad \text{y} \quad A^{-1}\mathbf{u}_{B'} = \mathbf{u}_B \end{aligned}$$

4.19 Ejemplo

Si en $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica $B_c = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y la base

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1,0,-1), \mathbf{v}_2 = (0,1,2), \mathbf{v}_3 = (1,1,0)\}$$

entonces

$$A = M(Id, B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_{B_c} = A\mathbf{u}_B$$

De esta manera, si $\mathbf{u} = (3, 2, -1)_B$, entonces

$$\mathbf{u}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir $\mathbf{u} = (2, 1, 1)_{B_c} = (2, 1, 1)$. Además:

$$A^{-1} = M(Id, B_c, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_B = A^{-1}\mathbf{u}_{B_c}$$

de donde $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)_B$, $\mathbf{e}_2 = (1, -1, 1)_B$ y $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, -1)_B$.

4.20 Cambios de base en una aplicación lineal

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal cuya matriz, respecto de las bases B_V en V y B_W en W, es A. ¿Cuál es la matriz de f respecto de nuevas bases B'_V en V y B'_W en W?
Sean $P = M(Id_V, B'_V, B_V)$ y $Q = M(Id_W, B'_W, B_W)$ las matrices del cambio de base en V y W, respectivamente. Observando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V^{B_V} & \xrightarrow{A} & W^{B_W} \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1} \\ V^{B'_V} & \xrightarrow{C} & W^{B'_W} \end{array}$$

se deduce que

$$C = M\left(f, B'_V, B'_W\right) = Q^{-1}AP$$

4.21 Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de la base canónica B_c tiene asociada la matriz

$$A = M\left(f, B_c, B_c\right) = M\left(f, B_c\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{es decir} \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es la matriz de f respecto de la base

   $$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)\} \ ?$$

   Se construye el diagrama

   $$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3)^{B} & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3)^{B} \end{array} \qquad \text{donde} \quad P = M\left(Id, B, B_c\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   y entonces

   $$C = M(f, B, B) = M(f, B) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

es decir, que si $\mathbf{u} = (x, y, z)_B$ entonces su imagen, también expresada en la base B, es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuál es la matriz de f respecto de la base B en el espacio inicial y la base canónica en el espacio final? Siendo I la matriz identidad, el nuevo diagrama, y la matriz buscada, son

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow I \\ (\mathbb{R}^3)^{B} & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \end{array} \quad \text{de donde} \quad D = M(f, B, B_c) = IAP = AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$